Title	Fuchs双曲型方程式の超函数解の構造 (代数解析学の諸問題)
Author(s)	田原, 秀敏
Citation	数理解析研究所講究録 (1976), 266: 142-175
Issue Date	1976-02
URL	http://hdl.handle.net/2433/105863
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

数理解析研究所講究録
266巻 1976年 142-175

Fuchs双曲型方程式の超函数解の構造.

東大. 理. 田原秀敏.

§0. まえがき

最初に常微分方程式の局所理論を復習しておこう.

(0). $t^2\frac{d^2u}{dt^2} + p(t)t\frac{du}{dt} + q(t)u = 0$. ($p(t), q(t)$ は正則函数)

方程式(0)は $t=0$ を確定特異点に持っている. 決定方程式を

$$e(\lambda) = \lambda(\lambda-1) + p(0)\lambda + q(0) = (\lambda-\rho_1)(\lambda-\rho_2)$$

とする. 簡単の為, $\rho_1-\rho_2 \neq$ 整数 と仮定すると

(I) 方程式(0)の $t=0$ の近傍 ($t=0$ を除く) での正則解は次の形に一意的に表わされる.

$$u(t) = c_1 t^{\rho_1} u_1(t) + c_2 t^{\rho_2} u_2(t).$$

$u_1(t), u_2(t)$ は $t=0$ で正則, c_1, c_2 は任意定数.

(II) 方程式(0)の $t=0$ の近傍での超函数 (hyperfunction) 解は.

(II-1) $\rho_1, \rho_2 \neq$ 整数の時は次の形に一意的に表わされる.

$$u(t) = \sum_{\pm} c_1^{\pm}(t\pm i0)^{\rho_1}\tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} c_2^{\pm}(t\pm i0)^{\rho_2}\tilde{u}_2(t)$$
$$= \sum_{\pm} d_1^{\pm}\, t_{\pm}^{\rho_1}\tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} d_2^{\pm}\, t_{\pm}^{\rho_2}\tilde{u}_2(t).$$

$\tilde{u}_i(t) = u_i(t)|_{\mathbb{R}}$．$c^{\pm}, d^{\pm}$ は任意定数．

(II-2)．ρ_1＝正整数（又は0）．$\rho_2 \neq$ 整数 とすると一般解は．

$$u(t) = c_1 t^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} c_2^{\pm} (t \pm i0)^{\rho_2} \tilde{u}_2(t) + c' Y(t) t^{\rho_1} \tilde{u}_1(t)$$

$$= \sum_{\pm} c_1 t_{\pm}^{\rho_1} \tilde{u}_1(t) + \sum_{\pm} d_2^{\pm} t_{\pm}^{\rho_2} \tilde{u}_2(t). \quad (t_{\pm}^{n} \equiv Y(\pm t) \cdot t^{n})$$

なる事は良く知られている．

我々は既に 田原[1][2] で 多変数のFuchs型 及び Fuchs双曲型偏微分方程式について幾多の議論を展開した．この論文では．それらを踏まえ．上の(I)(II)に類似の基本解を完全に決定する．それにより．Fuchs型及びFuchs双曲型方程式の一般解は全部書き下だす事ができる．同時に 田原[2] で目標とした双曲型方程式の結果を拡張する事は．完全に達成された事になる．

§1. Fuchs型方程式の基本解

田原[1][2]での議論を．$t=0$ に特異点を持つ正則解についての．基本解の構成という面から捕え直してみる．

$$P(t, x, D_t, D_x) = t^k D_t^m + \cdots + P_k(t, x, D_x) D_t^{m-k} + \cdots + P_m(t, x, D_x).$$

(1) $0 \leq k \leq m$

(2) $\operatorname{ord} P_j(t, x, D_x) \leq j \qquad 1 \leq j \leq m$

(3) $\operatorname{ord} P_j(0, x, D_x) \leq 0 \qquad 1 \leq j \leq k \quad (P_j(0, x, D_x) = a_j(x)$ とおく．$)$

定義(1.1)　微分作用素 P が (1)(2)(3) を満す時．P は $\{t=0\}$ に関し weight $(m-k)$ の Fuchs 型 であると言う．特性多項式を

$$\begin{aligned} e(\lambda, x) &= \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+1) + a_1(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+2) + \cdots + a_k(x)\lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1) \\ &= \lambda(\lambda-1)\cdots(\lambda-m+k+1)(\lambda-\lambda_1(x))\cdots(\lambda-\lambda_k(x)) \end{aligned}$$

とおく。特性根 $\lambda=0, 1, \cdots, m-k-1,\ \lambda_1(x), \cdots, \lambda_k(x)$ である．

Fuchs 型方程式の詳細は．田原 [1][2]，Baouendi-Goulaouic [3] を参照されたい．特性根について．次の仮定をおく．

(仮定)．　$\lambda_\nu(0)$，$\lambda_i(0)-\lambda_j(0) \notin \mathbb{Z}$　$(i\neq j)$．

この時．正則解に関する基本解は．次の様にして構成される．

$$\hat{V}_j = \{(t, x, y) \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n ;\ |t|<\varepsilon,\ |x|<\varepsilon,\ |y|<\varepsilon,\ x_i \neq y_i\ (i=1,\cdots,n),$$
$$|t| < (M|x_i-y_i|)^\rho\ (i\neq j)\}.$$

$\tilde{V} = \bigcap_{j=1}^{n} \hat{V}_j$　とおく．

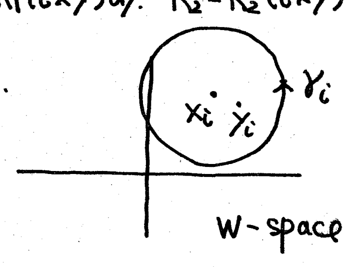
形式的微分作用素の環 $\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ ([2] 参照) は．次の様に表わされる．

$$\hat{\mathcal{D}}(\rho) \equiv \underset{\substack{\varepsilon\to 0\\ M\to 0}}{\text{ind-lim}} \left(\frac{\mathcal{O}(\tilde{V})}{\bigoplus_{j=1}^{n} \mathcal{O}(\hat{V}_j)} \otimes dy \right).$$

$\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ は次の諸性質をもっている．

(1)．$\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ は環構造をもつ．積は $K_1 = K_1(t,x,y)dy$．$K_2 = K_2(t,x,y)dy$ に対し．$K_1 \cdot K_2 \equiv \oint_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n} K_1(t,x,w)K_2(t,w,y)\,dw$．

積分路は右図の γ_i で共通定義領域に含まれるものをとる．



(2) $\rho=0$ の時は $\hat{\mathcal{D}}(0)$ は微分作用素のなす環.

(3) $\hat{\tilde{\mathcal{O}}}$ を $t=0$ にのみ特異点をもつ正則函数の芽（多価函数も許す）全体とする時. $\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ は $\hat{\tilde{\mathcal{O}}}$ の作用環になる. 又. $\mathcal{O}$ を正則函数全体とする時. $\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ は $\mathcal{O}$ の作用環にもなる.

但し. $K=K(t,x,y)dy \in \hat{\mathcal{D}}(\rho)$. $u(t,x) \in \mathcal{O}$ 又は $\hat{\tilde{\mathcal{O}}}$ に対し

$$K\cdot u = \oint_{\gamma_1\times\cdots\times\gamma_n} K(t,x,y)\,u(t,y)\,dy$$ と定める.

<u>定理 (1.2)</u>. 行列微分作用素 $P=tD_t-A(t,x,D_x)$ が次をみたす.

(1). $A(t,x,D_x)=(A_{ij}(t,x,D_x))_{1\leq i,j\leq m}$ とおく時. $\mathrm{ord}\,A_{ij}(t,x,D_x)\leq n_i-n_j+1$.

(2) $t=0$ の時 $\mathrm{ord}\,A_{ij}(0,x,D_x)\leq 0$ （$A(0,x,D_x)=A_0(x)$ とおく.）

(3) $A_0(0)$ の固有値 α_i について. $\alpha_i-\alpha_j \notin \mathbb{Z}-\{0\}$.

この時. 適当な $U(t,x,y)dy \in GL(\hat{\mathcal{D}}(\rho))$ を取ると

$$U^{-1}PU = tD_t - A_0(x)$$

なる変形が出来る.

（証明）. A の matrix-order <1 の時は $\mathcal{D}$（微分作用素）の中で上の変形が成り立つ事は [1].[2] で示した. $\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ を導入すれば同様に証明できる. Q.E.D.

<u>定理 (1.3)</u>. $P(t,x,D_t,D_x)$ を weight $(m-k)$ の Fuchs 型. 特性根について. $\lambda_\nu(0)$, $\lambda_i(0)-\lambda_j(0)\notin\mathbb{Z}$ $(i\neq j)$ を仮定する. $u(t,x)$ は. $t=0$ に特異点をもつ正則函数. 即ち $u(t,x)\in\hat{\tilde{\mathcal{O}}}$ $(\mathcal{O}\subset\hat{\tilde{\mathcal{O}}})$. とする.

この時 適当な K_i $(i=0,\cdots,m-k-1)$, L_j $(j=1,\cdots,k)\in\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ が存在し

$$v_i=K_i(D_t^i u),\quad w_j=L_j\,(tD_t-j+1)\cdots(tD_t)D_t^{m-k-1}u$$

なる関係式により次の(1)(2)の方程式は同値になる.

(1) $Pu=0$

(2) $D_t v_i=0$, $(tD_t-\lambda_j(x))w_j=0$. $(i=0,\cdots,m-k-1,\ j=1,\cdots,k)$.

(証明). $\sigma(P)=t^kD_t^m$ の時, $K_i, L_j\in\mathcal{D}$ で(1)(2)が同値なることは, [2]で既に示した. それと同様である. Q.E.D.

上の関係式を逆に表現すると, 適当な $\tilde K_i, \tilde L_j\in\hat{\mathcal{D}}(\rho)$ より

$$u=\sum\tilde K_i v_i+\sum\tilde L_j w_j$$

と書ける. 今 $\tilde K_i, \tilde L_j$ の定義函数を適当に一つとって, それを

$$\tilde K_i=\tilde K_i(txy)\,dy,\quad \tilde L_j=\tilde L_j(txy)\,dy$$

と表わす. 次の結果が§0.(I)の拡張である.

系(1.4). (1.3)の条件を仮定する. この時 $Pu=0$ の解で, 高々 $t=0$ にのみ特異点をもつ正則解(多価を許す)は、次の形に一意的に書ける.

$$u(t,x)=\sum_i\int\tilde K_i(txy)\varphi_i(y)\,dy+\sum_j\int\tilde L_j(txy)\,t^{\lambda_j(y)}\psi_j(y)\,dy$$

$\varphi_i(y)$, $\psi_j(y)$ は 任意正則函数.

(証明) 定理(1.3)より $v_i=\varphi_i(x)$, $w_j=t^{\lambda_j(x)}\psi_j(x)$ を得るから明らか. Q.E.D.

注意 (1.5) (1). 基本解と特性根との対応は. 次の通りである.

$$\tilde{K}_i(t,x,y) \longleftrightarrow \lambda = i \quad (\text{正整数又は } 0)$$

$$\tilde{L}_j(t,x,y) \longleftrightarrow \lambda = \lambda_j(x) \quad (\text{非整数})$$

(2). $Pu=0$ の解で正則解 ($t=0$ も含めて) のみを考えるならば、次の形に一意的に表わされる。

$$u(t,x) = \sum_i \int K_i(t,x,y)\,\varphi_i(y)\,dy.$$

適当に定数倍して. $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^i u(t,x)\big|_{t=0} = \varphi_i(x)$. $0 \leq i \leq m-k-1$

なる様に $\tilde{K}_i$ を選べる. (これが Cauchy 問題の基本解である. Baouendi-Goulaouic [3] が示したのは. この部分に他ならない).

(3) $\int \tilde{L}_j(t,x,y)\,t^{\lambda_j(y)}\psi_j(y)\,dy$ の部分に関連した議論としては. Tsuno [4] がある.

Problem (1.6). $\lambda_i(0)$, $\lambda_i(0)-\lambda_j(0) \notin \mathbb{Z}$ $(i \neq j)$ の仮定を省け. 言い換えるなら. 常微分方程式の Frobenius の方法を拡張せよ.

§2. Fuchs双曲型方程式の超函数基本解.

実領域での超函数解の構造を解明する. 議論は. 田原[1][2]で設定された方針を実行する事により. なされる.

$$P(t x D_t D_x) = t^k D_t^m + P_1(t x D_x) t^{k-1} D_t^{m-1} + \cdots + P_k(t x D_x) D_t^{m-k} + \cdots + P_m(t x D_x).$$

(1) $0 \leqslant k \leqslant m$

(2) $\mathrm{ord}\, P_j(t x D_x) \leqslant j \qquad 1 \leqslant j \leqslant m$

(3) $\mathrm{ord}\, P_j(0 x D_x) \leqslant 0. \qquad 1 \leqslant j \leqslant k.$

(4) m階部分 $\sigma_m(p) = t^k P_m(t x \tau \xi)$ なる積の形.

(5) $P_m(t x \tau \xi) = 0$ の根 τ について. $t.x.\xi$ 実数 $\Rightarrow$ τ でも実数.

定義(2.0.1)　P が (1)〜(5)を満す時. $\{t=0\}$ に関し weight $(m-k)$ の Fuchs双曲型という. (詳細は[1][2]を参照されたい.)

特性根について. §1と同様. 次の仮定をおく.

(仮定). $\lambda_\nu(0)$, $\lambda_i(0) - \lambda_j(0) \notin \mathbb{Z} \quad (i \neq j)$.

注意(2.0.2). $k=0$ の時. P は双曲型方程式に他ならない. この時. 超函数解について. $P : \mathcal{B} \longrightarrow \mathcal{B}$ を考える時.

(i) $\mathrm{Coker}\, P = 0$

(ii) $\mathrm{Ker}\, P \cong {}'\mathcal{B}^m$ (${}'\mathcal{B}$ は x-変数のみの超函数)

(ii)は具体的には、Cauchy問題の基本解 $E_j(t x y)$ $0 \leqslant j \leqslant m-1$ を取る事により (基本解は一意的に存在).

$$\begin{cases} u(t.x) = \displaystyle\sum_{j=0}^{m-1} \int E_j(t x y)\, v_j(y)\, dy. & v_j(y) \in {}'\mathcal{B} \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t x)\Big|_{t=0} = v_j(y) & 0 \leqslant j \leqslant m-1 \end{cases}$$

により対応付けられる. (詳細は Boney-Schapira [5]. 柏原一

河合[6]を参照）．本節の目標は．この結果をFuchs双曲型に拡張する事である．

次の図式を考えよう．（$aB \ni u \Leftrightarrow u \in B$ & $S\text{-}S(u) \not\ni (0, \pm\sqrt{-1}dt\infty)$．）

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 \longrightarrow & aB & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_{(0,+\sqrt{-1}dt\infty)} \oplus C_{(0,-\sqrt{-1}dt\infty)} & \longrightarrow 0 \\
& \downarrow P_a & & \downarrow P & & \downarrow P_c & \\
0 \longrightarrow & aB & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C_{(0,+\sqrt{-1}dt\infty)} \oplus C_{(0,-\sqrt{-1}dt\infty)} & \longrightarrow 0
\end{array}$$

これを'3つ組の完全列'とみて．long exact sequenceをとると、

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ker}\,P_a \longrightarrow \boxed{\mathrm{Ker}\,P} \longrightarrow \mathrm{Ker}\,P_c$$
$$\longrightarrow \mathrm{Coker}\,P_a \longrightarrow \boxed{\mathrm{Coker}\,P} \longrightarrow \mathrm{Coker}\,P_c \longrightarrow 0$$

を得る．従って．Ker P, Coker P の研究は次の2つに分かれる．

(2.1)．$P_a : aB \to aB$ の構造は如何．？

(2.2)．$P_c : C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)} \to C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$ の構造は如何？

前者は．Cauchy問題に対応し、後者は $k=0$ の時の佐藤の基本定理の拡張を意図するものである．

§§2.1．$P_a : aB \to aB$ の構造．

Cauchy問題の解の存在と一意性は．次の定理が保証する．

<u>定理(2.1.1)</u>．P を weight $(m-k)$ の Fuchs双曲型．特性多項式について．$e(\lambda, 0) \neq 0$ for $\lambda \in \mathbb{Z}$．$\lambda \geq m-k$ が成り立つとする．

この時、任意の超函数 $f(t,x)\in a\mathcal{B}$, $V_0(x),\cdots,V_{m-k-1}(x)\in {}'\mathcal{B}$ に対し次を満たす超函数 $u(t,x)\in a\mathcal{B}$ が一意的に存在する。

$$\begin{cases} Pu = f \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u\,\Big|_{t=0} = V_j \qquad 0\leqslant j\leqslant m-k-1 \end{cases}$$

(証明). 存在については既に[1][2]で証明した。問題は一意性であるが、次の順序で証明される。念の為、存在も含め、補題を連ねてゆく事にする。

<u>補題(2.1.2)</u>. 定理(2.1.1)の Cauchy 問題は常に解をもつ。

(証明) [1][2]参照. 基本的には、§1 での Fuchs 型に対する正則解の存在と Boney-Schapira [5] の論法を合わせればよい。Q.E.D.

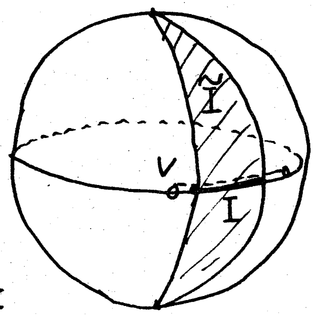
<u>補題(2.1.3)</u>.

$I\subset\sqrt{-1}S^*\mathbb{R}^n$. 固有凸閉集合

$\tilde{I}=\{(t,x,\sqrt{-1}(\tau dt+\langle\xi dx\rangle)\infty\,;\ (x,\sqrt{-1}\langle\xi dx\rangle\infty)\in I\}$

とおく. Cauchy 問題に関し、

$S\text{-}S(f)\subset\tilde{I}$, $S\text{-}S(V_j)\subset I$



と仮定する. この時 I の任意の近傍 V に対し, $S\text{-}S(u)\subset\tilde{V}$ となる解が存在する. (V に依存して u の定義域 (t,x) を十分小さく取ってゆく.)

(証明). Boney-Schapira [5] の論法で超函数の定義函数の正則

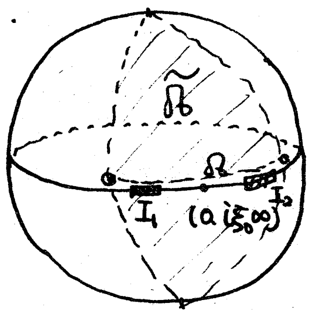
域を延長してゆく時、$t=0$ の近傍では x-空間の領域がほとんどもとの領域と同じ位迄延長できる事に注意すればよい.

Q.E.D.

補題(2.1.4)　定理(2.1.1)の解は一意的である. 即ち $Pu=0$, $u\in aB$ $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u|_{t=0}=0$ $0\leq j\leq m-k-1$ ならば $u=0$ である.

(証明)

任意の $(0, i\xi_0\infty)$ を取り, $sp: \mathcal{B}\to \mathcal{C}_{(0,i\xi_0\infty)}$ $sp(u)=0$ を示せば u は実解析的だから Taylor 展開より $u=0$ を得る. $sp(u)$ を示せばよい. $(0,i\xi_0\infty)$ の近傍 $\Omega\subset\sqrt{-1}S^*R^n$ をとる.



u を $(0,i\xi_0\infty)$ の近傍で cut off する事により. 適当な $w\in aB$, $S\text{-}S(w)\Subset\tilde{\Omega}$

$$sp(w)=sp(u)$$

とできる. ($\tilde{\Omega}$ は補題(2.1.3)の記号)

$sp(w)=sp(u)$ より. $sp\cdot P(w-u)=0$. 従って. 適当な固有凸閉集合 I_ν と超函数 $w_\nu\in aB$ 及び $V_{\nu,j}\in aB$ $(0\leq j\leq m-k-1)$ をとって 次を満す様にできる.

(i) $\bigcup_\nu \tilde{I}_\nu \ni (0, i\xi_0\infty)$

(ii) $S\text{-}S(w_\nu)\subset\tilde{I}_\nu$　$S\text{-}S(V_{\nu,j})\subset I_\nu$

(iii) $P(w-u)=\sum_\nu w_\nu$, $\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j(w-u)|_{t=0}=\sum_\nu V_{\nu,j}$　$0\leq j\leq m-k-1$.

補題(2.1.3)より次の Cauchy 問題は解をもつ.

$$\begin{cases} Pu_\nu=w_\nu, & u_\nu\in aB \quad S\text{-}S(u_\nu)\subset\tilde{I}_\nu \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u_\nu|_{t=0}=V_{\nu,j} & 0\leq j\leq m-k-1. \end{cases}$$

$\tilde{u} = w - \sum_{\nu} u_\nu$ とおく. $\tilde{u}$は次の条件を満たす.

① $\tilde{u} \in {}_a\mathcal{B}$

② $P\tilde{u} = Pw - \sum P u_\nu = Pw - \sum w_\nu = Pu = 0$.

③ $sp(\tilde{u}) = sp(w) = sp(u)$

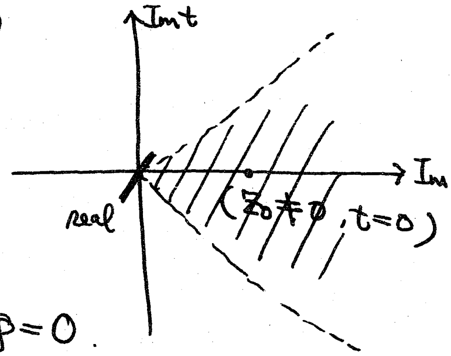
④ $(\frac{\partial}{\partial t})^j \tilde{u}|_{t=0} = (\frac{\partial}{\partial t})^j w|_{t=0} - \sum_{\nu} v_{\nu j} = (\frac{\partial}{\partial t})^j u|_{t=0} = 0$.

この時 $\tilde{u}=0$を示す. すると③より $sp(u)=0$ を得て証明は完了する. $\tilde{u}=0$ の証明. $S-S(\tilde{u}) \subset \tilde{\Omega}$ 故 $\tilde{u}$はひとつの方向からの正則函数の境界値で表わされる. $\tilde{u}=[\varphi(t,z)]$ とする.

この時 ②④より ②' $P\cdot\varphi = 0$ $\left(\begin{array}{c}\varphi \in \mathcal{O}(\Gamma) \\ \Gamma\text{は cone}\end{array}\right)$

④' $(\frac{\partial}{\partial t})^j \varphi|_{t=0} = 0$ $\quad 0 \leq j \leq m-k-1$.

を得る. $\varphi(t,z)$ の定義域は右図の斜線部とみなしてよい.



上の②'④' を $t=0$, $z_0 \neq 0 \in$ で考えるとtについてのTaylor展開より $(t,z)=(0,z_0)$ の近傍で $\varphi=0$.

一意接続より $\varphi=0$ が全体の斜線部でいえる。故に $\tilde{u}=0$ を得る.

Q.E.D.

注意(2.1.5) 補題(2.1.3) は $(t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. 2変数の時は自明である. 従って. 補題(2.1.4)の証明法より Cauchy問題の解の一意性は2変数の時は Fuchs型に対し成り立つ.

注意(2·1·6)　[1] [2] で論じた Fuchs 双曲系の Cauchy 問題についても、解の存在と一意性が成り立つ．（詳しくは [1] [2] を参照．Fuchs 系の Cauchy-Kowalevsky の定理と上の議論より得られる）．

$P_a : {}_a\mathcal{B} \to {}_a\mathcal{B}$ の構造にもどろう．　定理(2·1·1) より

(i)　$\mathrm{Coker}\, P_a = 0$

(ii)　$\mathrm{Ker}\, P_a \cong {}'\mathcal{B}^{m-k}$.

を得る．(ii) の対応は具体的には Cauchy 問題の基本解 $E_j(t,x,y)$ $(0 \leqslant j \leqslant m-k-1)$ を使うと

$$\begin{cases} u(t,x) = \sum_j \int E_j(t,x,y)\, v_j(y)\, dy \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^j u(t,x)\Big|_{t=0} = v_j(x) \qquad 0 \leqslant j \leqslant m-k-1 \end{cases}$$

によって対応づけられる．

ここで Cauchy 問題の基本解 $\{E_j(t,x,y)\}_{0 \leqslant j \leqslant m-k-1}$ とは次をいう

$$\begin{cases} P E_j = 0. \qquad S\text{-}S(E_j) \not\ni (0, \pm\sqrt{-1}\, dt\, \infty) \\ \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^{\ell} E_j \Big|_{t=0} = \delta_{j,\ell}\, \delta(x-y) \qquad 0 \leqslant j, \ell \leqslant m-k-1 \end{cases}$$

この様な E_j は一意的に存在し、その特異スペクトルは

$$S\text{-}S(E_j) \subset \{ (t,x,y\,;\, \sqrt{-1}(\tau dt + \langle \xi\, dx \rangle + \langle \eta\, dy \rangle)\infty)\,;\ x = y, \\ |\tau| \leqslant M|\xi|,\ |\xi + \eta| \leqslant M|t|^{1/s}|\xi| \ \}$$

（具体的な構成は、[1] [2] を参照されたい．）

§§2.2. $P_c : C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)} \to C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$ の構造.

$(0,dt\infty)$ で方程式系 $\mathcal{M} = \mathcal{P}^f/\mathcal{P}^f P$ (又は $\mathcal{P}/\mathcal{P}P$) を考える. $\mathcal{M}$の台は $\{t=0\}$ 故 maximally degenerate である. そこで max. deg. な台をもつ方程式系の標準形を求める事を考える. 簡単な場合は既に 柏原-大島 [7] で求められている. 次の通りである.

<u>定理(2.2.1)</u> $A(t,x,D_t,D_x)$ を $(0,dt\infty)$ での 0階の Ψ.D.Op を成分とした行列とする. この時 可逆な Ψ.D.Op の行列 $U(t,x,D_t,D_x)$, $V(x,D_t,D_x)$ (各成分は高々 0 階) が存在して, 次が成り立つ.

$$U(t,x,D_t,D_x)\,(tD_t - A(t,x,D_t,D_x))\,V(x,D_t,D_x) = tD_t - B(x,D_x).$$

残念ながら, この定理は我々の Fuchs双曲型を cover しない. $\mathcal{M}$の標準形を求める為には無限階の Ψ.D.Op を使う必要があるだろう. 我々の得た標準形は次の通りである.

$$A(t,x,D_t,D_x) = (A_{ij}(t,x,D_t,D_x))_{1\le i,j\le m}.$$

(1) $A_{ij}(t,x,D_t,D_x)$ は $(0,dt\infty)$ での Ψ.D.Op. $\mathrm{ord}\,A_{ij} = n_{ij}$ とおく.

(2) A の matrix order $\rho_A < 1$

但し. $\rho_A = \max_{\substack{s\\ i_1,\dots,i_s}} \frac{1}{s}\,\mathrm{ord}\,\Gamma_{\{i_1\cdots i_s\}}$. $\quad \Gamma_{\{i_1\cdots i_s\}} = \begin{bmatrix} n_{i_1 i_1}, & \cdots, & n_{i_1 i_s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ n_{i_s i_1} & \cdots & n_{i_s i_s} \end{bmatrix}$

$$\mathrm{ord}\,\Gamma_{\{i_1\cdots i_s\}} = \max_{\substack{\pi\\(\text{置換})}} \sum n_{i_k i_{\pi(k)}}$$

と定義する.

(3). $A(t\,x\,D_t\,D_x)$ は D_t に関しては高々0階．（従って $A(t\,x\,D_t\,D_x)=\sum_{\alpha\beta} t^{\alpha} A_{\alpha\beta}(x\,D_x) D_t^{-\beta}$ と展開できる）．

(4). $A_{00}(x\,D_x)=A^0(x)$．函数行列である．

(5). $A^0(0)$ の固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ について $\alpha_i-\alpha_j \notin \mathbb{Z}-\{0\}$．

定理(2.2.2)．$A(t\,x\,D_t\,D_x)$ が上の(1)〜(5)を満たすとする．この時．無限階の可逆芯 D. Op $U(t\,x\,D_t\,D_x) \in GL(m,\mathcal{P}_{(a\,dt\infty)})$ が存在し

$$U^{-1}(tD_t-A(t\,x\,D_t\,D_x))\,U = tD_t - A^0(x)$$

が成り立つ．

(証明はかなり長くなるので §3 で実行する)．

系(2.2.3)．$A(t\,x\,D_t\,D_x)$ の各成分が高々0階 &. $\sigma_0(A)(0,0,1,0)$ の固有値 $\alpha_1 \cdots \alpha_m$ について $\alpha_i-\alpha_j \notin \mathbb{Z}-\{0\}$ とする．この時適当な $U(t\,x\,D_t\,D_x) \in GL(m\,\mathcal{P}^f)$（各成分は0階）．が存在し．

$$U^{-1}(tD_t-A(t\,x\,D_t\,D_x))\,U = tD_t - A(0,x,1,0)$$

(証明)．Aの各成分が0階なら(1)−(4)は自動的に満たしている．故に明らか．（なお、系(2.2.3)は $\alpha_i-\alpha_j \notin \mathbb{Z}-\{0\}$ を除けば定理(2.2.1)と同じ内容）． Q.E.D.

系(2.2.4)．m 階の微分作用素 $P(t\,x\,D_t\,D_x)$ が

$$P(t\,x\,D_t\,D_x) = Q(t.x.tD_t, tD_x) + tR(t.x.tD_t, D_x)$$

(1). $\operatorname{ord} Q > \operatorname{ord} R$.

(2) $Q(0,x,\vartheta,0)$ の ϑ^m の係数 $\neq 0$ で、$Q(0,x,\vartheta,0)=0$ の根を $\lambda_1(x), \cdots, \lambda_m(x)$ とする時 $\lambda_i(0)$, $\lambda_i(0)-\lambda_j(0) \notin \mathbb{Z}$ と仮定.

この時. 次の同型が $(0, dt\infty)$ で成り立つ.

$$\mathcal{P}/\mathcal{P}\cdot P \cong \bigoplus_{j=1}^{m} \mathcal{P}/\mathcal{P}(tD_t-\lambda_j(x)) \quad (\text{as 左}\mathcal{P}\text{-加群.})$$

(証明).

既に[1][2]で類似の標準形を幾度となく導いた. 同じ方法による. なお 柏原-大島[7]も参照されたい. Q.E.D.

系(2.2.4)の形より. 従来 $P=Q(t,x,tD_t,tD_x)$ なる形の確定特異点型に対してのみ論じられていた境界値問題は. $P=Q+R$ の形に迄一般化される. (弱い意味の確定特異点型の境界値問題). $P=Q(t,x,tD_t,tD_x)$ の場合は System の場合も含め. 柏原-大島[7]で詳述されている. 弱い場合への拡張は、いつか機会があれば まとめる事にし. 今は論じない.

系(2.2.5). P が weight $(m-k)$ の Fuchs型 で. $\sigma_m(P)=t^k p_m$, &. 特性根に関し. $\lambda_i(0)$, $\lambda_i(0)-\lambda_j(0) \notin \mathbb{Z}$ とする. (双曲型の条件は不必要). この時 $(0\ dt\infty)$ で次の同型が成り立つ.

$$\mathcal{P}/\mathcal{P}\cdot P \cong \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{P}/\mathcal{P}(tD_t-\lambda_j(x)) \quad (\text{as 左}\mathcal{P}\text{-加群})$$

(証明). (2.2.4)と同じこと. Q.E.D.

さて. $P_c : C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)} \to C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$ の構造にもどろう.

(2.2.5) より $(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)$ では $(tD_t - \lambda_j(x))u = 0$ と同値である.

$\mathcal{P}/\mathcal{P}(tD_t - \lambda_j(x))$ の $C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$ での構造は次の通りである.

<u>定理 (2.2.6)</u>　$tD_t - \lambda(x) : C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)} \to C_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}$ に関し.

(i) $\mathrm{Coker}\, P = 0$

(ii) $\mathrm{Ker}\, P \cong {}'\mathcal{B}$. ($Pu=0$ なる u は. $u=(t+i0)^{\lambda(x)}\varphi(x)$ と表さる)

(証明)　(ii) は自明. $D_t^{\lambda(x)} \in \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$ (佐藤-河合-柏原 [8] を参照. $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \equiv C_{\mathbb{R}} \otimes \mathcal{V}_x$ で $\mathcal{P}_{\mathbb{R}} \times C \to C$ 作用環となる. 又 $\mathcal{P} \subset \mathcal{P}_{\mathbb{R}}$).

$$D_t^{\lambda(x)}(tD_t - \lambda(x))D_t^{-\lambda(x)-1} = t$$

と変形できる. 故に $t : C_{(0,\sqrt{-1}dt\infty)} \to C_{(0,\sqrt{-1}dt\infty)} \to 0$ を示せばよい. $\forall \mu \in C_{(0,\sqrt{-1}dt\infty)}$ に対し $\exists u \in \mathcal{B}$. $sp(u) = \mu$. u の特異スペクトル $\subset (0\sqrt{-1}dt\infty)$ の近傍 とできる. 定義函数 $\varphi(t,z)$ の境界値 $= u$ とする. この時 $\frac{1}{t}\varphi(t,z)$ も超函数を定義する. $(=w)$

明らかに $t \cdot sp(w) = \mu$ となる.　　Q.E.D.

以上により. $P_c : C_{(0,+\sqrt{-1}dt\infty)} \oplus C_{(0,-\sqrt{-1}dt\infty)} \longrightarrow C_{(0,+\sqrt{-1}dt\infty)} \oplus C_{(0,-\sqrt{-1}dt\infty)}$

の構造は. (i) $\mathrm{Coker}\, P_c = 0$

(ii) $\mathrm{Ker}\, P_c \cong {}'\mathcal{B}^{2k}$.

を得る.

§§2·3. $P : \mathcal{B} \to \mathcal{B}$ の構造.

P8の図式と §§2·1. 2·2 の議論より. 次は明らかである.

(i) $\mathrm{Coker}\, P = 0$

(ii)' $0 \to a\mathcal{B}^P \to \mathcal{B}^P \xrightarrow{sp_\pm} C^P_{(0\,\sqrt{-1}dt\infty)} \oplus C^P_{(0\,-\sqrt{-1}dt\infty)} \to 0.$

$a\mathcal{B}^P \cong {}'\mathcal{B}^{m-k}, \quad C^P_{(0\,\pm\sqrt{-1}dt\infty)} \cong {}'\mathcal{B}^{2k}.$

まず(ii)'の完全列が分解している事を示そう. 系(2·2·5)の同型は, $\mathcal{P}/\mathcal{P}\cdot P = \mathcal{P}u$, $\mathcal{P}/\mathcal{P}(tD_t-\lambda_j(x)) = \mathcal{P}v_j$ (u, v_j は生成元) とおく時. 適当な亜D. Op $A_j(t x D_t D_x)$ $1\leq j\leq k$ によって.

$$v_j = A_j(t x D_t D_x)u$$

なる関係式で与えられる. (ii)'の完全列と $v_j = A_j\cdot u$ より. 次を満たす超函数 $F_j^{(\pm i0)}(t x y)$ $(1\leq j\leq k)$ が存在する.

(イ) $P\cdot F_j^{(\pm i0)} = 0$

(ロ) $A_l(t x D_t D_x)\, sp_\pm F_j^{(\pm i0)}(t x y) = (t\pm i0)^{\lambda_j(x)}\delta(x-y)\cdot\delta_{j,l}$

(この $F_j^{(\pm i0)}$ は modulo $a\mathcal{B}^P$ で決まる超函数).

<u>補題(2·3·1)</u> $\lambda : C^P_+ \oplus C^P_- \longrightarrow a\mathcal{B}^P$ を次の順序で定義する.

$C^P_+ \oplus C^P_- \ni u_+ \oplus u_- \xrightarrow{\lambda_1} (A_j u_+) \oplus (A_j u_-) = ((t\pm i0)^{\lambda_j(x)}\varphi_j^\pm(x))$

$\xrightarrow{\lambda_2} u = \sum_{\pm j}\int F_j^{(\pm i0)}(t x y)\varphi_j^\pm(y)\,dy \in a\mathcal{B}^P.$

この時. $sp_\pm \circ \lambda = id$ である.

(証明) λ_1 は単射 (i.e.同型) なる事に注意しよう.

$$\lambda_1 \circ sp_{\pm} \circ \lambda (u_+ \oplus u_-)$$
$$= \lambda_1 \Big(sp_+ \big(\sum_{+\ell} \int F_\ell^{(+i0)}(txy)\, \varphi_\ell^+(y)\, dy \big) \big) \oplus sp_- \big(\sum_{-\ell} \int F_\ell^{(-i0)}(txy)\, \varphi_\ell^-(y)\, dy \big) \Big)$$
$$= \Big\{ A_j \big(sp_+ \big(\sum_{+\ell} \int F_\ell^{(+i0)} \varphi_\ell^+ dy \big) \big) \Big\} \oplus \Big\{ A_j \big(sp_- \big(\sum_{-\ell} \int F_\ell^{(-i0)} \cdot \varphi_\ell^- dy \big) \big) \Big\}$$
$$= \Big\{ A_j \; sp_+ \int F_j^{(+i0)} \varphi_j^+ dy \Big\} \oplus \Big\{ A_j \; sp_- \int F_j^{(-i0)} \varphi_j^- \, dy \Big\}$$
$$= \Big(\int (t+i0)^{\lambda_j(x)} \delta(x-y)\, \varphi_j^+(y)\, dy \Big) \oplus \Big(\int (t-i0)^{\lambda_j(x)} \delta(x-y)\, \varphi_j^-(y)\, dy \Big)$$
$$= \big((t+i0)^{\lambda_j(x)} \varphi_j^+(x) \big) \oplus \big((t-i0)^{\lambda_j(x)} \varphi_j^-(x) \big)$$
$$= \lambda_1 (u_+ \oplus u_-)$$

λ_1 は単射. 故 $sp_\pm \circ \lambda (u_+ \oplus u_-) = u_+ \oplus u_-$　故 $sp_\pm \circ \lambda = id$　Q.E.D.

写像 λ により (ii)′ は分解している. 更に. (2·3·1) の証明より結局. 次の形にまとめられる.

(ii) $\mathrm{Ker}\, P \cong \mathcal{B}^{m+k}$.

具体的には. 上の $F_j^{(\pm i0)}(txy)$ と §§2·1 の Cauchy 問題の基本解 $E_j(txy)$ を使うと

$$u(tx) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \int E_i(txy)\, \varphi_i(y)\, dy + \sum_{\pm, j=1}^{k} \int F_j^{(\pm i0)}(txy)\, \psi_j^\pm(y)\, dy.$$

によって. 任意函数 φ_i. $\psi_j^\pm$ と対応している.

<u>定理(2·3·2)</u>. P を Fuchs双曲型. (w.r.t. $(m-k)$). 特性根 $\lambda_j(x)$ について $\lambda_i(0)$. $\lambda_j(0) - \lambda_i(0) \notin \mathbb{Z}$ ($i \neq j$ $1 \leq i, j \leq k$) と仮定する. この時 $Pu = 0$ なる超函数解は次の形に一意的に表わされる.

$$u(tx) = \sum_{i=0}^{m-k-1} \int E_i(txy)\, \varphi_i(y)\, dy + \sum_{\pm, j=1}^{k} \int F_j^{(\pm i0)}(txy)\, \psi_j^\pm(y)\, dy.$$

$\varphi_i(x)$ $\psi_j^{\pm}(x)$ は任意超函数.

(証明). 明らか. Q.E.D.

注意(2.3.3) $E_i(txy)$, $F_j^{(\pm i0)}(txy)$ が §0(II)の拡張なる基本解である. 特性根との対応は

$E_i(txy) \longleftrightarrow \lambda = i$ (0又は正整数) (特異点なし)

$F_j^{(\pm i0)}(txy) \longleftrightarrow \lambda = \lambda(x)$ (非整数) (特異点表わる)

基本解のうち $\{E_i(txy)\}$ は一意的に決まるが, $\{F_j^{(\pm i0)}(txy)\}$ の選び方には, $a\mathcal{B}^P$ だけの任意性がある. $\lambda = \lambda_j(x)$ に対応する基本解も一意的に決定することを考えよう.

補題(2.3.4) 次の条件を満す超函数 $F_j^{\pm}(txy)$ ($1 \leq j \leq k$) が存在し, かつ一意的である.

(i) $P F_j^{\pm} = 0$

(ii) $A_\ell \, sp_{\pm} F_j^{\pm} = t_{\pm}^{\lambda_j(x)} \delta_{j\ell} \delta(x-y)$ $\quad 1 \leq j, \ell \leq k$

(iii) $\mathrm{Supp}\, F_j^{\pm} \subset \{\pm t \geq 0\}$ (複号同順)

(証明)

$(0, dt\infty)$ で $\mathcal{P}u \cong \bigoplus_{j=1}^{k} \mathcal{P}v_j$ 関係式は $v_j = A_j u$ で与えられる. この関係式を逆にみると, 適当な $K_j(t\,x\,D_t D_x) \in \mathcal{P}$ があって

$$u = \sum_{j=1}^{k} K_j v_j$$

従って　$w_j^{\pm} = K_j \cdot t_\pm^{\lambda_j(x)}\delta(x-y)$ とおけば、次を満たす。

(i) $w_j^{\pm}$ は、$(0, \pm\sqrt{-1}dt\infty)$ での microfunction

(ii) $A_\ell w_j^{\pm} = \delta_{j\ell}\, t_\pm^{\lambda_j(x)}\delta(x-y)$ 　　$1 \leq j, \ell \leq k$

この時実は $w_j^{\pm}$ は microfunction のみならず、超函数として、意味付けできることを示そう。

$K_j\, t_\pm^{\lambda_j(x)}\delta(x-y)$ の内、$t_\pm^{\lambda_j(x)}\delta(x-y)$ は超函数である。K_j は、D_t の負巾以外は全て微分作用素だから普通の微分で作用させる。D_t^{-m} $(m>0)$ は、次の様に形式的に作用させる。

$$D_t^{-m}(t_\pm^{\lambda(x)}) = \frac{1}{(\lambda(x)+1)(\lambda(x)+2)\cdots(\lambda(x)+m)}\, t_\pm^{\lambda(x)+m}$$

この時、上の作用は、巫D.Op の積と、互換である。即ち2つの巫D.Op P, Q に対し　$(P\circ Q)(t_\pm^{\lambda(x)}) = P\cdot(Q(t_\pm^{\lambda(x)}))$　が成り立つ。（互換性の証明は、あとまわし）。

ここで、次の Radon 変換の公式を思い出そう。

$$\delta(x-y) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int \frac{\omega(\xi)}{(\langle x-y, \xi\rangle + i0)^n}$$

$\omega(\xi)$ は単位球の面積要素。

上で決めた作用により、次の形式和を考える。

$$\tilde{F}_j^{\pm}(t x y \xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} K_j(t x D_t D_x)\, t_\pm^{\lambda_j(x)} \frac{1}{(\langle x-y, \xi\rangle)^n}$$

とおく。

形式的な作用と巫D.Op の互換性より次を満たす。

(a). $P(t x D_t D_x)\tilde{F}_j^{\pm}(t x y \xi) = 0$

(b). $A_\ell \cdot \tilde{F}_j^{\pm}(t x y \xi) = \delta_{j\ell} \cdot \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\, t_\pm^{\lambda_j(x)} \frac{1}{(\langle x-y, \xi\rangle)^n}$

Pの双曲型の仮定より，田原[1][2]，柏原-河合[6]の基本解の構成法と殆んど同様にして，$\tilde{F}_j^{\pm}(t\,x\,y\,\xi)$ は，$\mathrm{Im}\langle x-y,\xi\rangle$ 方向からの境界値として超函数を定義する．それを $\tilde{F}^{\pm}(t\,x\,y\,\xi,+i0)$ と書く．

$$F_j^{\pm}(t\,x\,y) = \int \tilde{F}_j^{\pm}(t\,x\,y\,\xi,+i0)\,\omega(\xi)$$

とおく．上の(a)(b)とRadon変換の公式より

(i) $P\cdot F_j^{\pm} = 0$

(ii) $A_\ell\, sp_{\pm} F_j^{\pm} = \delta_{j\ell}\, t_{\pm}^{\lambda_j(x)}\,\delta(x-y)$

(iii) $S\text{-}S(F_j^{\pm}) \subset \{\pm t \geqq 0\}$

を満たす事は明らかである．一意性はHolmgren-柏原-河合の定理を使えばよい． Q.E.D.

証明中で決めた作用と $\mathcal{E}_R\,\mathcal{G}_p$ の積との互換性を示しておこう．問題は変数tに関するのみだから，$P=P(t,D_t)$，$Q=Q(t,D_t)$ として $(P\circ Q)(t^{\lambda}) = P(Q(t^{\lambda}))$ を示せばよい．各項ずつ考えて，結局，$P=D_t^{\ell}$，$Q=t^m D_t^n$ で確かめれば良い．

(イ) $\ell \geqq 0$, $n\geqq 0$ ならば微分だから明らか．

(ロ) $\ell\geqq 0$, $n<0$ の時．($n\to -n$ とおく．)

$$D_t^{\ell}(t^m D_t^{-n}(t^{\lambda})) = \frac{(\lambda+n+m)\cdots(\lambda+n+m-\ell+1)}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n)}\, t^{\lambda+m+n-\ell}.$$

一方，

$$D_t^{\ell}\circ(t^m D_t^{-n}) = \sum_{0\leqq\alpha\leqq m,\ell} \frac{1}{\alpha!}\cdot\frac{\ell!}{(\ell-\alpha)!}\,\frac{m!}{(m-\alpha)!}\, t^{m-\alpha} D_t^{-n+\ell-\alpha}$$

簡単の為 $l \leqq n$ と仮定する. $D_t^{-n+l-\alpha}$ は負巾のみとなる故

$$(D_t^l t^m D_t^{-n})(t^\lambda) = \sum_\alpha \frac{1}{\alpha!}\frac{l!}{(l-\alpha)!}\frac{m!}{(m-\alpha)!}\frac{1}{(\lambda+1)\cdots(\lambda+n-l+\alpha)}\, t^{\lambda+m+n-l}$$

$$= \sum_\alpha \binom{l}{\alpha}\frac{m!}{(m-\alpha)!}\frac{(\lambda+n-l+\alpha+1)\cdots(\lambda+n)}{(\lambda+1)\cdots\cdots(\lambda+n)}\, t^{\lambda+m+n-l}$$

結局 次の関係を示せば良い. ($x=\lambda+n$ とおく.)

$$(x+m)\cdots(x+m-l+1) = \sum_\alpha \binom{l}{\alpha}\frac{m!}{(m-\alpha)!}\, x(x-1)\cdots(x-l+\alpha+1).$$

l に関する帰納法を使えば 容易に証明できる. (略). 故に この場合も $D_t^l(t^m D_t^{-n}(t^\lambda)) = (D_t^l\cdot t^m D_t^{-n})(t^\lambda)$ を満たす.

(ハ) 他の場合も(ロ)と同様に丁寧に計算すれば 互換性は示されるので略する. Q.E.D.

(2.3.4) の $\{F_j^\pm(t,x,y)\}_{1\leq j\leq k}$ が $\lambda=\lambda_j(x)$ に対応する基本解である. 実際 次の様にして 証明できる. [1] [2] で 次の完全列を示した.

$$0 \longrightarrow \mathcal{B}^P \xrightarrow{\lambda} \mathcal{B}^P_{(+)}\oplus\mathcal{B}^P_{(-)} \xrightarrow{\mu} {}'\mathcal{B}^{m-k} \longrightarrow 0.$$

但し $\mathcal{B}^P_{(\pm)} = \{\pm t>0$ での $Pu=0$ の超函数解$\}$.

写像 μ は次で与えられる. $u_+\oplus u_- \in \mathcal{B}^P_{(+)}\oplus\mathcal{B}^P_{(-)}$ に対し $\tilde{u}_\pm$ を

$$\begin{cases} \pm t>0 \text{ では } \tilde{u}_\pm = u_\pm \\ \pm t<0 \text{ では } \tilde{u}_\pm = 0 \qquad (\text{複号同順}) \end{cases}$$

なる様にとる. $P\tilde{u}_\pm = \varphi_0^\pm(x)\delta(t)+\cdots+\varphi^\pm_{m-k-1}(x)\delta^{(m-k-1)}(t)$.

この $\{\varphi_j^\pm\}$ は $\tilde{u}_\pm$ の取り方によらない. そこで 次の様に決

める. $\quad \mu(u_+\oplus u_-) = (\varphi_j^+ - \varphi_j^-)_{0\leq j\leq m-k-1} \in \mathcal{B}^{m-k}$

補題 (2.3.5) 上の完全列は分解している.

(証明) $\quad u_+ = Y(t)\left(\sum_i \int E_i(txy)v_i(y)dy\right) \in \mathcal{B}^P(t)$ とおく.

$Pu_+ = \sum_{i=0}^{m-k-1}\varphi_i(x)\delta^{(i)}(t)$ となる。計算より 適当な可逆行列 $A(x, D_x)$ をとると $A\{v_j\} = \{\varphi_j\}$. $\quad \gamma_+ : \mathcal{B}^{m-k} \longrightarrow \mathcal{B}^P(t)$ を

$\{\varphi_j\} \xrightarrow{A^{-1}} \{v_j\} \longrightarrow Y(t)(\sum\int E_i v_i dy)$ と定めると $\mu\circ\gamma_+ = id$ は明らか.

Q.E.D

補題 (2.3.6) $\quad t>0$ での $Pu=0$ の超函数解は次の形に一意的に書ける.

$$u(tx) = Y(t)\sum_{i=0}^{m-k-1}\int E_i(txy)v_i(y)dy + \sum_{j=1}^{k}\int F_j^+(txy)\varphi_j(y)dy$$

$v_i(x)$. $\varphi_j(x)$ は 任意超函数.

(証明). $u \in \mathcal{B}^P(t)$ を $t<0$ まで 0 となる様に延長したものを $\tilde{u}$ とする. $P(\tilde{u} - \gamma_+\circ\mu(u)) = 0$ 故に $(0, \sqrt{-1}dt\infty)$ で考えると

$$A_j\, sp_+(\tilde{u} - \gamma_+\circ\mu(u)) = t_+^{\lambda_j(x)}\varphi_j(x)$$

今 $\quad w = \tilde{u} - \gamma_+\circ\mu(u) - \sum_{j=1}^{k}\int F_j^+(txy)\varphi_j(y)dy$ とおくと w は次を満たす.

$$\begin{cases} \text{(i)} & \operatorname{supp} w \subset \{t \geq 0\} \\ \text{(ii)} & A_j\, sp_+(w) = 0 \qquad (1\leq j\leq k) \end{cases}$$

故に $sp_+(w) = 0$ を得て. $w=0$ となる. 一意性は明らかであろう $\quad$ Q.E.D.

前頁の完全列より次の定理を得る.

<u>定理(2·3·7)</u> P を weight $(m-k)$ の Fuchs双曲型. 特性根 $\lambda_j(x)$ について $\lambda_i(0)$, $\lambda_i(0)-\lambda_j(0)\notin\mathbb{Z}$ とする. この時 $Pu=0$ の超函数解は次の形に一意的に表わされる.

$$u(t,x)=\sum_{i=0}^{m-k-1}\int E_i(t,x,y)\,v_i(y)\,dy+\sum_{\pm,j=1}^{k}\int F_j^{\pm}(t,x,y)\,\varphi_j^{\pm}(y)\,dy.$$

ここで $\{E_i\}$ は Cauchy問題の基本解. $\{F_j^{\pm}\}$ は 補題(2·3·4) で構成した基本解.

(証明) 明らか. Q.E.D.

$F_j^{\pm}$ は $\lambda=\lambda_j(x)$ に対応する基本解で. 補題(2·3·4)により.一意的に特徴づけられた. §0.(II) での基本解の幾つかの取り方と対比されたい.

以上によって. 田原[2] の予想は.すべて解決されたわけである. 即ち $a\mathcal{B}^P\cong{}'\mathcal{B}^{m-k}$. $\mathcal{B}^P_{(\pm)}\cong{}'\mathcal{B}^m$. $C^P_{(0,\pm\sqrt{-1}dt\infty)}\cong{}'\mathcal{B}^k$,

$a^{\pm}\mathcal{B}^P\cong{}'\mathcal{B}^m$

である.

§3. 定理(2.2.2)の証明のスケッチ.

§2 で残しておいた定理(2·2·2)の証明を行なう. 紙枚の都合上. 追跡可能な限り.計算部分は.略して書く. 定理の条件をもう一度列挙しておこう.

(1). $A(txD_tD_x) = (A_{ij}(txD_tD_x))_{1\leq i,j\leq \ell}$ は $(0,dt\infty)$ での 亜D.Op.

(2). matrix-order $\rho_A < 1$ （ρ_Aの定義は §2.2 参照）.

(3). AはD_tに関し高々0階（展開して $A=\sum_{\alpha\beta} t^{\alpha}A_{\alpha\beta}(xD_x)D_t^{-\beta}$）.

(4). $A_{00}(xD_x) = A^0(x)$ 函数行列

(5). $A^0(0)$ の固有値 $\alpha_1, \cdots, \alpha_\ell$ について. $\alpha_i - \alpha_j \notin \mathbb{Z}-\{0\}$.

<u>定理(2.2.2)</u> $A(txD_tD_x)$ が(1)～(5)を満足する時. 可逆行列. $U(txD_tD_x) \in GL(\ell, P_{(0\,dt\infty)})$ が存在して次が成立する.

$$U^{-1}(tD_t - A(txD_tD_x))U = tD_t - A^0(x).$$

証明は次の３段階を実行する.

(a). 形式的にUを構成する.（Uを核函数表示して構成）.

(b). 形式解Uが実際.無限階の亜D.Op の増大条件を満たす事を確かめる.

(c) U が 可逆であることの証明.

(2.2.2) の形よりも $(tD_t - A)U = U(tD_t - A^0(x))$ の方程式を考える.

§§3.1. 形式解の構成.

行列Uとして. D_tに関し. 高々0階のものを考える. 展開すると $U = \sum t^{\alpha}U_{\alpha\beta}(xD_x)\cdot D_t^{-\beta}$ と表わされる.

ここで積分核表示を考える.（佐藤-河合-柏原[8]参照）.

$$\begin{cases} U_{\alpha\beta}(xD_x) = U_{\alpha\beta}(x,y)\,dy, \\ D_t^{-\beta} \quad = \delta^{(-\beta)}(t-s)\,ds \end{cases}$$

より、行列 U は次の様に表示してもよい.

$$U = \sum t^{\alpha} U_{\alpha\beta}(xy)dy \cdot D_t^{-\beta} = \sum t^{\alpha} U_{\alpha\beta}(xy)\,\delta^{(-\beta)}(t-s)\,dyds.$$

次の方程式が,一意的に解をもつ事を示してゆこう.

$$\text{(E)} \begin{cases} (tD_t - A(txD_tD_x))\,U = U\,(tD_t - A^0(x)) \\ U_{00} = 1 \quad (= \delta(x-y)\,dy\,) \end{cases}$$

$A = \sum t^{\alpha} A_{\alpha\beta}(xD_x) D_t^{-\beta}$. $U = \sum t^{\alpha} U_{\alpha\beta}(xy)dy \cdot D_t^{-\beta}$ とおいて代入すると,$t^{\alpha} D_t^{-\beta}$ 項の係数比較より次の漸化式を得る.

$$(\alpha+\beta)U_{\alpha\beta} + U_{\alpha\beta} \cdot A_{00} - A_{00} U_{\alpha\beta} = \sum_{\substack{m+k-h=\alpha \\ i+j+h=\beta \\ 0\le h\le m,\ (m,i)\ne(\alpha,\beta)}} \frac{(-1)^h}{h!}\frac{(j+h-1)!}{(j-1)!}\frac{m!}{(m-\alpha)!} A_{kj} U_{mi}$$

田原[1][2]の議論と同様、ℓ^2 列ベクトル $R_{\alpha\beta}(xy)\,dy$ を

$$R_{\alpha\beta}(xy) = {}^t(U_{\alpha\beta}^{(1,1)}, U_{\alpha\beta}^{(1,2)}, \cdots, U_{\alpha\beta}^{(1,\ell)}\ U_{\alpha\beta}^{(2,1)}, \cdots, U_{\alpha\beta}^{(\ell,\ell)})$$

と置くと,上の漸化式は次の様に書き直す事ができる.

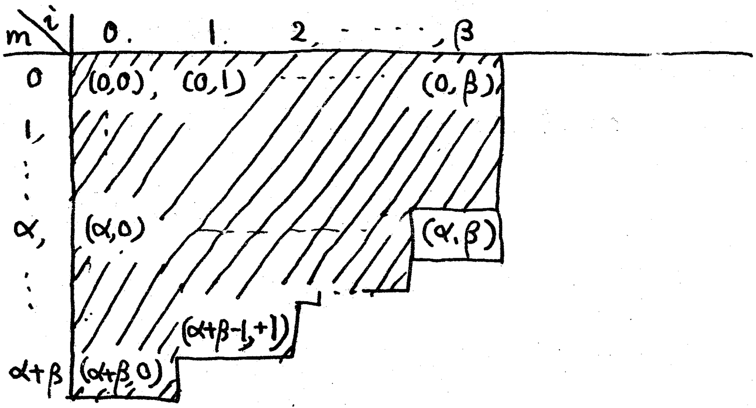
$$(\alpha+\beta)R_{\alpha\beta} - A_{00}(x)\otimes I_{\ell} \cdot R_{\alpha\beta} + I_{\ell}\otimes {}^tA_{00}(y) \cdot R_{\alpha\beta}$$
$$= \sum_{\prime\prime} \frac{(-1)^h}{h!}\frac{(j+h-1)!}{(j-1)!}\frac{m!}{(m-\alpha)!} A_{kj}(xD_x)\otimes I_{\ell} \cdot R_{m,i}$$

$(\alpha,\beta)=(0,0)$ の時. (E) $U_{00}=1$ とおくと (E) を満たすので良い.

$\alpha+\beta\ne 0$ の時は $A^0(0)\otimes I_{\ell} - I_{\ell}\otimes {}^tA(0)$ の固有値が $\alpha_i-\alpha_j$ で (5) の仮定より. $\alpha_i-\alpha_j \notin \mathbb{Z}-\{0\}$ に注意すると $(\alpha+\beta - A_{00}(x)\otimes I_{\ell} + I_{\ell}\otimes {}^tA(y))$ は原点の近傍で可逆行列である. 故に,次の様に書ける.

$$R_{\alpha\beta} = \sum \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(j+k-1)!}{(j-1)!}\frac{m!}{(m-\alpha)!}\left(\alpha+\beta-A^0(x)\otimes I_\ell+I_\ell\otimes {}^tA(y)\right)^{-1}A_{kj}\,R_{mi}$$

ここで $\sum$ に表われる (m, i) は.次の斜線部となる.



故に.方程式(E)の解 $U_{\alpha\beta} = \sum t^\alpha U_{\alpha\beta}(x\,y)\,dy\,D_t^{-\beta}$ は形式的に一意的に存在する事がわかった.

§§ 3.2. 形式解の増大度の評価.

本節の評価は.田原[1][2]の Fuchs系の Cauchy-Kowalevsky の定理を導びく時の評価の方法と.佐藤-河合-柏原[8]の.Partial DeRham を導びく評価法とを組み合せて得られる.

$$\tilde{A} = A(t\,x\,D_t\,D_x)\otimes I_\ell - I_\ell\otimes {}^tA(y)$$

とおく.展開して $\tilde{A} = \sum t^\alpha \tilde{A}_{\alpha\beta}(x\,y\,D_x)\cdot D_t^{-\beta}$ とおくと漸化式は、次の様に表わされる.

$$R_{\alpha\beta} = \sum \frac{(-1)^k}{k!}\frac{(j+k-1)!}{(j-1)!}\frac{m!}{(m-\alpha)!}(\alpha+\beta-\tilde{A}_{00})^{-1}\tilde{A}_{kj}\,R_{m.i}$$

$$= \sum_{\substack{i+j\leq\beta \\ k\leq\alpha \\ (i,j,k)\neq(\beta,0,0)}} A_{k,j}^{(i)}(\alpha,\beta)\,R_{\alpha+\beta-i-j-k,\,i}$$

但し $A_{k,j}^{(i)}(\alpha,\beta) = (-1)^{\beta-i-j}\dfrac{(\beta-i-1)!}{(\beta-i-j)!(j-1)!}\dfrac{(\alpha+\beta-i-j-k)!}{(\alpha-k)!}((\alpha+\beta)-\tilde{A}_{00})^{-1}\tilde{A}_{k,j}$

とおく．

<u>補題(3.2.1)</u>　$R_{\alpha\beta}$ は次の級数で表現できる．

$$\begin{cases} R_{00}(x,y) = {}^t(R_{00}^{(i,j)}(x,y)), \quad R_{00}^{(i,j)} = \delta_{ij}\delta(x-y) \\ R_{\alpha\beta}(x,y) = \sum_{\mathfrak{S}} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1,\beta_1)\times\cdots\times A_{k_p,j_p}^{(i_p)}(\alpha_p,\beta_p)\,R_{00} \end{cases}$$

但し $\mathfrak{S}$ は次の様な和を考える．$(\alpha=\alpha_1, \beta=\beta_1)$

(i) $m_1=\alpha+\beta$, $0\leqslant k_1\leqslant\alpha$, $0\leqslant i_1+j_1\leqslant\beta$ $((i_1 j_1 k_1)\neq(\beta,0,0))$ を取る．

もし，$m_2=m_1-k_1-j_1=0$ なら，ここでストップ $(p=1)$．もし $m_2>0$ ならば，$m_2=m_1-k_1-j_1$, $\beta_2=i_1$ とおいて

(ii) $m_2=\alpha_2+\beta_2$, $0\leqslant k_2\leqslant\alpha_2$, $0\leqslant i_2+j_2\leqslant\beta_2$ $((i_2 j_2 k_2)\neq(\beta_2,0,0))$ を取る．もし $m_3=m_2-k_2-j_2=0$ なら，ここでストップ．$(p=2)$

もし $m_3>0$ ならば $\beta_3=i_2$ とおいて

(iii) (i)(ii) と同様のプロセスを繰り返す．以下同様．

上の補題より $R(=U)$ は次の和で表わされる．

$$R=\sum_{\alpha,\beta} t^\alpha D_t^{-\beta}\cdot\sum_{\mathfrak{S}_{\alpha,\beta}} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1\beta_1)\cdots A_{k_p,j_p}^{(i_p)}(\alpha_p\beta_p)\cdot R_{00}(x,y)\,dy$$

$$=\Big[\sum_{\alpha\beta}\sum_{\mathfrak{S}_{\alpha\beta}} t^\alpha D_t^{-\beta} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1\beta_1)\cdots A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p,\beta_p)\Big]\delta(t-s)R_{00}(x,y)\,ds\,dy$$

従って R が $\Psi.D.O_p$ の増大条件を満たす

$\Leftrightarrow$ R が holomorphic microfunction として意味をもつ

$\Leftrightarrow$ [　　] 内が亜 $D, \mathcal{Q}_p$ の増大条件を満たす.

従って結局、$\displaystyle\sum_{\alpha\beta} t^{\alpha} D_t^{-\beta} \sum_{\mathfrak{S}_{\alpha\beta}} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1 \beta_1) \cdots A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p, \beta_p)$ の評価に帰着された.

補題 (3.2.2) $\tilde{A} = A \otimes I_\ell - I_\ell \otimes {}^tA(y)$ の matrix-order $\rho_{\tilde{A}}$ について

(1) $\rho_A \leqq 1$ ならば $\rho_{\tilde{A}} \leqq 1$.

(2) $\rho_A < 1$ ならば $\rho_{\tilde{A}} < 1$ を得る.

従って $\tilde{A}$ も §3 の最初に述べた条件 (1) ～ (4) を満足していることに注意しよう. 以下, 使う条件は (1)～(4) のみだから $\tilde{A}$ も A と表わす. $A = (A_{ij})_{1 \le i, j \le \ell}$. ($\ell$ = matrix size)

補題 (3.2.3) (1) $\rho_A \leqq 1$ の時 適当な $(n_1 \cdots n_\ell) \in \mathbb{Z}^\ell$ が存在して $\operatorname{ord} A_{ij} \leqslant n_i - n_j + 1$ が成り立つ.

(2) $(\lambda - A^0(x))$ の (i,j) 余因子を $\Delta_{ij}(\lambda, x)$, $\deg_\lambda \Delta_{ij}(\lambda, x)$ を λ に関する次数とする時, $\ell - \deg_\lambda \Delta_{ij} \geqslant n_i - n_j + 1$.

(3) 今 行列 G を
$$\begin{cases} g_{ij} = 1 & (\text{if } \ell - \deg_\lambda \Delta_{ij} = n_i - n_j + 1 \\ g_{ij} = 0 & (\text{if } \ell - \deg_\lambda \Delta_{ij} > n_i - n_j + 1 \end{cases}$$
とおく. もし $\rho_A < 1$ ならば, G は巾零行列である.

$\rho_A \leqq 1$ の時は上の (1) (2) を使って [1] [2] で類似の無限和につ

いて，評価を実行している．$\rho_A<1$ の時 G＝巾零 がどう影響して来るか，しらべてみよう．次の評価は易しい．

$$A(t,x,D_t,D_x)=\sum t^{\alpha}A_{\alpha\beta}(x,D_x)D_t^{-\beta}.$$

$$N_\ell^{\omega}(P:\lambda)=\sum_{k,\alpha,\beta}\frac{(2n)^k\cdot k!}{(k+|\alpha|)!\,(k+|\beta|)!}\,|D_\xi^{\alpha}D_x^{\beta}P_{\ell-k}(x,\xi)|\,T^{2k+|\alpha|+|\beta|}$$

とおく．Monvel-Kree [9] の形式的ノルムである．

<u>補題(3.2.4)</u>　$A_{\alpha\beta}(x,D_x)$ について，次が成り立つ

(1)．$A_{\alpha,\beta}(x,D_x)$ の (i,j) 成分の order $\leq n_i-n_j+1+\beta$．

(2)　$N^{\Omega}_{n_i-n_j+1+\beta}((i,j)$成分 of $A_{\alpha\beta}:\lambda)\ \leq\ N\cdot A^{\alpha+\beta}$．

（$\Omega.\lambda.N.A$ は $\alpha.\beta.i.j$ に無関係な定数 or 定領域である．）

<u>補題(3.2.5)</u>　$(m-A^0(x))^{-1}A_{\alpha\beta}(x,D_x)$ は次の様な分解をもつ．

$$(m-A^0(x))^{-1}A_{\alpha\beta}(x,D_x)=A^{(1)}_{\alpha\beta}(m)+A^{(2)}_{\alpha,\beta}(m)+\cdots+A^{(p)}_{\alpha,\beta}(m)$$

但し次の条件をみたす．

(1)　$A^{(i)}_{\alpha,\beta}(m)$ の (j,k) 成分の order $\leq n_j-n_k+i+\beta$

(2)　$N^{\Omega}_{n_j-n_k+i+\beta}((j,k)\text{ of }A^{(i)}_{\alpha\beta}(m))\ \leq\ \dfrac{NA^{\alpha+\beta}}{m^i}$

（$\Omega.N.A$ は一定）

(3) もし $\rho_A<1$ ならば，定数 ℓ が存在して，$A^{(i)}_{\alpha\beta}(m)$ の積を ℓ 個とる毎に，order が1階下がる．つまり，

$A^{(i_1)}_{\alpha_1\beta_1}(m_1)\times\cdots\times A^{(i_\ell)}_{\alpha_\ell,\beta_\ell}(m_\ell)$ の (j,k) 成分の order

$$\leq n_j-n_k+\sum_{k=1}^{\ell}(i_k+\beta_k)-1.$$

補題(3.2.2)〜(3.2.5)をもとの問題に適用しよう．問題は，

$$\widehat{R} = \sum_{\alpha\beta} \sum_{\mathfrak{S}_{\alpha,\beta}} t^{\alpha} D_t^{-\beta} A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(\alpha_1, \beta_1) \times \cdots \times A_{k_p j_p}^{(i_p)}(\alpha_p, \beta_p)$$

$$A_{k,j}^{(i)}(\alpha,\beta) = (-1)^{\beta-i-j} \frac{(\beta-i-1)!}{(\beta-i-j)!(j-1)!} \frac{(\alpha+\beta-i-j-k)!}{(\alpha-k)!} (\alpha+\beta-\widetilde{A}_{00})^{-1} \widetilde{A}_{kj}$$

とおく時．$\widehat{R}$ の増大条件を評価することである．ここで，

$(\alpha+\beta-\widetilde{A}_{00})^{-1}\widetilde{A}_{k,j}$ に補題(3.2.5)を適用すると．

$$(\alpha+\beta-\widetilde{A}_{00})^{-1}\widetilde{A}_{k,j} = A_{k,j}^{(1)}(\alpha+\beta) + \cdots + A_{k,j}^{(p)}(\alpha+\beta)$$

と表わされ，各 $A_{k,j}^{(i)}(\alpha+\beta)$ は補題(3.2.5)の条件(1)(2)(3)を満足する．特に条件(3)に注意すると

$$\overset{\Lambda}{N}_{n_p-n_q+i_1+\cdots+i_l+j_1+\cdots+j_l-1}\left((p,q)\text{成分 of } A_{k_1 j_1}^{(i_1)}(m_1)\times\cdots\times A_{k_l, j_l}^{(i_l)}(m_l) : \lambda\right)$$
$$\leq \frac{N\, A^{k_1+\cdots+k_l+j_1+\cdots+j_l}}{m_1^{i_1} m_2^{i_2}\times\cdots\times m_l^{i_l}}$$

を得る．これで大体田原[1][2]でのFuchs系の評価の方法と同じレールの上に乗ったわけである．後は[1][2]を充分よく参照しながら、和を取る順序をうまくとれば次の最終的な評価を得る。ここで上の注意の様に $\rho_A<1$ の為 $A_{kj}^{(i)}(m)$ は l 個の積をひとつの単位として評価する．

<u>(評価)</u>

$\widehat{R}(t\times y_{\Lambda}^{\tau}\xi) = \sum_j \widehat{R}_j(t\times y_{\Lambda}^{\tau}\xi)$．（$\widehat{R}_j$ は $\overset{(\tau,\xi)}{\mathscr{Z}}$ に関し j 次斉次）

この時 $|\widehat{R}_j| \leq \displaystyle\sum_{\substack{h\geq 1 \\ i\leq h-[\frac{h}{l\rho}]}} \frac{(h-[\frac{h}{l\rho}]-i)!}{h!} C^h \varepsilon^i$

但し, [ ]はGauss記号. C, ε は定数. 領域を小さくする事により C は幾らでも小さく出来る.

この評価より $|R_j|$ が無限階の必D. Op になる事を示すには, 佐藤-河合-柏原[8] の Chapter II. §5 と同様に Stering の公式を使って評価すればよい. 結局, (E)の形式解は本当の解となる.

まとめると

$$(E)\begin{cases}(tD_t - A(t,x,D_t,D_x))\,U = U\,(tD_t - A^0(x)) \\ U_{00} = 1 \qquad (D_t \text{に関し}\ 0\ \text{階})\end{cases}$$

は, U = 無限階必D. Op として一意的に解をもつ.

§§3.3. 可逆性の証明.

§3の最初の条件(1)~(5)は formal adjoint で閉じている. 故に A^* について同様に考える事により, 次の方程式(E^*)も V = 無限階必D. Op として一意的な解をもつ.

$$(E^*)\begin{cases}V\,(tD_t - A(t,x,D_t,D_x)) = (tD_t - A^0(x))\,V \\ V_{00} = 1 \qquad (V\text{は}\ D_t\ \text{に関し}\ 0\ \text{階})\end{cases}$$

この時 $UV = VU = 1$ を示せばよい. $W = UV - 1$ とおくと W も D_t に関し 0 階故 $W = \sum_{\alpha,\beta} t^\alpha W_{\alpha\beta} \cdot D_t^\beta$ と展開され $W_{00} = 0$, (E)(E^*)より W は次を満たす.

$$(\hat{E}).\quad (tD_t - A)\,W = W\,(tD_t - A),\quad W_{00} = 0.$$

§§3.1 と同様に $t^{\alpha}D_t^{\beta}$ の係数比較を行なうと漸化的に $W_{\alpha\beta}=0$ を得る．故に $UV=1$, $VU=1$ も同様である．

以上によって定理(2.2.2)の証明は完了した．（紙数の都合上計算部分をかなり略したが，基本的な方法はすべて[1][2]に表われているので，それを参考にされたい．）

参考文献

[1] 田原 Fuchs双曲型方程式の研究 東京大学修士論文

[2] 田原 Fuchs双曲型方程式 数理研講究録（研究集会'超函数と線型微分方程式IV' 報告集） 近刊

[3] Baouendi-Goulaouic Cauchy Probrems with characteristic initial hypersurface Comm. Pure. Appl. Math 26 1973

[4] 津野 On the prolongation of local holomorphic solutions of partial differential equation III. equations of the Fuchsian type, to appear

[5] Boney-Schapira Solutions hyperfunctions du problème de Cauchy Springer Lecture Note No. 287 1973

[6] 柏原-河合 On microhyperbolic pseudo-differential operators I. to appear

[7] 柏原-大島　Boundary value problem for the system of differential equations with regular singularity : in preparation

[8] 佐藤-河合-柏原　Microfunctions and pseudo-differential equations　Springer Lecture Note　No. 287

[9] Monvel-Kree　Pseudo-differential operators and Gevrey classes　Ann. Inst. Fourier, 17-1　1967

その他，C^∞，$\mathcal{D}'$，L^2 等で同様なタイプの方程式に対し解構造を明らかにしようという試み（?）に関しては，上の[3]以外に、次が散見される．

[10] Serge ALINHAC　Problemes de Cauchy pour des operateurs singuliers　Bull. Soc. math. France　102　1974.
(及び，そこでの refarence 参照).